

$$- \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$- \int \cos nx dx = \frac{1}{n} \sin nx$$

$$- \int \sin nx dx = -\frac{1}{n} \cos nx$$

$$- \int \frac{dx}{\sin x} = -\cot x$$

$$- \int \frac{dx}{\cos x} = \tan x$$

$$- \int e^{mx} dx = \frac{1}{m} e^{mx}$$

$$- \int \sinh mx dx = \frac{1}{m} \cosh mx$$

$$- \int \cosh mx dx = \frac{1}{m} \sinh mx$$

$$- \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a}$$

$$- \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a}$$

$$- \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2})$$

$$- \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left( \frac{x-a}{x+a} \right)$$

$$- \int f(x) (f(x))^n dx = \frac{(f(x))^{n+1}}{n+1}$$

## مادرات تفاضل

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$\int \cos mx dx = \frac{1}{m} \sin mx$$

$$\int \sin mx dx = -\frac{1}{m} \cos mx$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x$$

$$\int e^{mx} dx = \frac{1}{m} e^{mx}$$

$$\int \sinh mx dx = \frac{1}{m} \cosh mx$$

$$\int \cosh mx dx = \frac{1}{m} \sinh mx$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 \pm a^2})$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left( \frac{x-a}{x+a} \right)$$

$$\int f'(x) (f(x))^n dx = \frac{(f(x))^{n+1}}{n+1}$$



$$-\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} dx = 2\sqrt{f(x)} + C$$

$$-\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln(f(x))$$

$$-\sqrt{x^2 + a^2} \quad ; \quad x = a \tanh t$$

$$x = a \sinh t$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$-\sqrt{x^2 - a^2} \quad ; \quad x = a \cosh t$$

$$x = \frac{a}{\sinh t}$$

$$-\sqrt{a^2 - x^2} \quad ; \quad x = a \sin t$$

Example:  $\int \frac{dx}{\sqrt{x} \sin^2 \sqrt{x}}$

$$t = \sqrt{x}$$

$$dt = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx \Rightarrow 2dt = \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

$$\int \frac{2dt}{\sin^2 t} = -2 \cot t = -2 \cot \sqrt{x}$$

$$\int \frac{e^{-x}}{\cos^2 e^{-x}} dx$$

$$t = e^{-x} \Rightarrow dt = -e^{-x} dx$$

$$-dt = e^{-x} dx$$

$$= -\int \frac{dt}{\cos^2 t} = -\tan t = -\tan e^{-x} + C$$

$$\int \frac{1 + \ln x}{x(1 - \ln x)} dx$$

$$t = \ln x$$

$$dt = \frac{1}{x} dx$$

$$\int \frac{1+t}{1-t} dt$$

إذا كانت دالة البسط أكبر من دالة المقام فنقسم البسط على المقام

$$\frac{1-t}{1-t} \sqrt{\frac{1+t}{1-t}}$$

$$\int \left( -1 + 2 \frac{1}{1-t} \right) dt$$

$$= -t + 2 \ln(1-t)$$

$$= -\ln x + 2 \ln(1 - \ln x)$$

$$\int x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx$$

$$x = a \sin t$$

$$dx = a \cos t dt$$

$$\int a^2 \sin^2 t \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} \cdot a \cos t dt$$

$$a^4 \int \sin^2 t \cdot \sqrt{1 - \sin^2 t} \cdot \cos t dt$$

$$\sqrt{\cos^2 t}$$

$$a^4 \int \sin^2 t \cdot \cos^2 t dt$$

$$a^4 \int (\sin t \cdot \cos t)^2 dt$$



$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x \Rightarrow \frac{1}{2} \sin 2x = \sin x \cos x$$

$$a^4 \int \left( \frac{1}{2} \sin 2t \right)^2 dt = \frac{a^4}{4} \int \sin^2 2t dt$$

$$\sin^2 mx = \frac{1 - \cos 2mx}{2}$$

$$\cos^2 mx = \frac{1 + \cos 2mx}{2}$$

$$\frac{a^4}{4} \int \frac{1 - \cos 4t}{2} dt = \frac{a^4}{4} \left[ \frac{1}{2} t - \frac{1}{2} \frac{1}{4} \sin 4t \right]$$

\* المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة من الرتبة الأولى

$$M \cdot y' = g(x) \quad \text{where } M = e^{\int p(x) dx}$$

$$M = e^{\int p(x) dx}$$

نضرب الطرفين بـ  $M$  فنحصل على:

$$[My]' = g(x)M \Rightarrow My' = \int g(x)M dx + C$$

$$xy' + y = \frac{\ln x}{x}$$

$$y' + \frac{1}{x}y = \frac{\ln x}{x^2}$$

⊗

$$\begin{aligned} y^{(n)} &\neq y^n \\ y^{(2)} &= y'' \neq y^2 \end{aligned}$$

$$M = e^{\int \frac{1}{x} dx} = \frac{1}{x} \cdot \frac{\ln x}{x} = \frac{\ln x}{x^2}$$

$$xy' + y = \frac{\ln x}{x} \Rightarrow [xy]' = \frac{\ln x}{x} \Rightarrow xy = \int \frac{\ln x}{x} dx + C$$

$$[xy]' = \frac{\ln x}{x} \Rightarrow xy = \int \frac{\ln x}{x} dx + C$$

$$xy = \frac{(\ln x)^2}{2} + C \Rightarrow y = \frac{(\ln x)^2}{2x} + \frac{C}{x}$$



- المعادلة التفاضلية العنصرية من الرتبة  $n$  :

المعادلة التفاضلية ذات  
أفعال متغيرة

المعادلة التفاضلية ذات  
أفعال ثابتة

المعادلة التفاضلية ذات أفعال متغيرة :

$$a_n(x) y^{(n)} + a_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \dots + a_1(x) y' + a_0(x) y = F(x) \quad (1)$$

ومن المعادلة المتجانسة :

$$a_n(x) y^{(n)} + a_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \dots + a_1(x) y' + a_0(x) y = 0 \quad (2)$$

الحل العام للمعادلة التفاضلية العنصرية (1)

$$y = y_h + y_p$$

الحل العام للمعادلة التفاضلية

المتجانسة

الحل العام للمعادلة التفاضلية المتجانسة (2)

$$y_h = A_1 y_1 + A_2 y_2 + \dots + A_n y_n$$

حالة خاصة :

إذا كانت المعادلة التفاضلية من الشكل :

$$a_2(x) y'' + a_1(x) y' + a_0(x) y = 0 \quad (3)$$

وكان  $y$  معلوم

طريقة تخفيض الرتبة :

$$y = y_1 \int u \, dx$$

نضع  $y$  عدد من المرات في الرتبة المعادلة نفرض المشتقات في المعادلة (3) وتصبح بهذا الشكل :

$$( ) u' + ( ) u = 0$$

وهي معادلة تفاضلية ذات متغيرات منفصلة نفصل متغيراتها :



2. طريقة:  $y = y_1 u$  فنفرض عدد من الرات يادي رتبة  
المعادلة ونضرب في المعادلة ونصبح من الشكل:

$$(1) u'' + (1) u' = 0$$

$$z = u' \Rightarrow z' = u''$$

$$(1) z' + (1) z = 0$$

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad -3$$

طريقة ليونيل استقراري:  $y_1$  معلوم

$$y_h = y_1 \left[ \int \frac{C_1 e^{-\int p(x) dx}}{(y_1)^2} dx + C_2 \right]$$

ملحوظة: أمثال  $y''$  يادي الرات

أوجد من المعادلة التفاضلية:

$$(x \sin x + \cos x) y'' - x \cos x y' + \cos x y = 0$$

إذا كانت أمثال  $y_1 = x$  فلاحظ المعادلة المتجانسة:

الحل: طريقة تفويض الرتبة:

$$y = y_1 \int u dx = x \int u dx$$

$$y' = \int u dx + u \cdot x$$

$$y'' = u + u + x u' = 2u + x u'$$

التعويض:

$$\Rightarrow 2(x \sin x + \cos x)u + x(x \sin x + \cos x)u' - x^2 \cos x u - x \cos x \int u dx + x \cos x \int u dx = 0$$

$$\Rightarrow x(x \sin x + \cos x)u' + (2(x \sin x + \cos x) - x^2 \cos x)u = 0$$

$$x(x \sin x + \cos x)u' = -(2(x \sin x + \cos x) - x^2 \cos x)u$$

$$\frac{u'}{u} = -\frac{2(x \sin x + \cos x)}{x(x \sin x + \cos x)} + \frac{x^2 \cos x}{x(x \sin x + \cos x)}$$



$$\frac{u'}{u} = \frac{-2}{n} + \frac{n \cos n}{n \sin n + \cos n} \quad \rightarrow$$

$$\ln \frac{u}{C} = -2 \ln n + \int \frac{n \cos n}{n \sin n + \cos n} dx$$

$$f(n) = n \sin n + \cos n \rightarrow f'(n) = \sin n + n \cos n - \sin n$$

$$\ln \frac{u}{C} = \ln n^{-2} + \ln (n \sin n + \cos n)$$

$$\ln \frac{u}{C} = \ln \frac{n \sin n + \cos n}{n^2}$$

$$u = C \cdot \frac{n \sin n + \cos n}{n^2}$$

$$u_2 = \frac{n \sin n + \cos n}{n^2}$$

$$y_2 = n \int u_2 dx = n \int \frac{n \sin n + \cos n}{n^2} dx$$

$$\int \frac{n \sin n + \cos n}{n^2} dx = \int \frac{\sin n}{n} dx + \int \frac{\cos n}{n^2} dx$$

$$u = \cos n \Rightarrow du = -\sin n dx$$

$$dv = \frac{dn}{n^2} \Rightarrow v = -\frac{1}{n}$$

$$= \int \frac{\sin n}{n} dx + \left[ -\frac{1}{n} \cos n - \int \frac{\sin n}{n} dx \right]$$

$$= -\frac{1}{n} \cos n$$



$$y_2 = -\cos x$$

$$y_h = y = A_1 y_1 + A_2 y_2 = A_1 x - A_2 \cos x$$

$$\Rightarrow \boxed{y_h = A_1 x + A_0 \cos x} \quad ; \quad A_0 = -A_2$$

$$y'' - \frac{x \cos x}{x \sin x + \cos x} y' + \frac{\cos x}{x \sin x + \cos x} y = 0$$

$$y_h = y_1 \left[ \int \frac{C_1 e^{-\int P(x) dx}}{(y_1)^2} dx + C_2 \right]$$

$$\begin{aligned} e^{-\int P(x) dx} &= e^{\int \frac{x \cos x}{x \sin x + \cos x} dx} = e^{\ln x \sin x + \cos x} \\ &= x \sin x + \cos x \end{aligned}$$

$$y_h = x \left[ C_1 \int \frac{x \sin x + \cos x}{x^2} dx + C_2 \right]$$

$$y_h = x \left[ C_1 \left[ \frac{-\cos x}{x} \right] + C_2 \right]$$

$$y_h = -C_1 \cos x + x C_2$$

$$y_h = C_0 \cos x + x C_2 \quad ; \quad C_0 = -C_1$$



$$z = x + iy$$

عقبی (11)

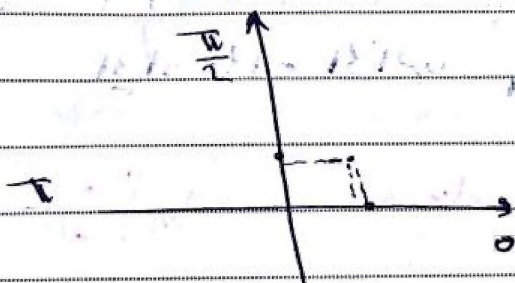
$$z = 1 + i \quad x = 1, y = 1$$

Arg z

$$-\pi < \theta \leq \pi$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x} = 1 \Rightarrow \tan \theta = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} + n\pi, n = 0, \pm 1, \pm 2$$

$$-\pi < \theta - \frac{\pi}{4} \leq \pi \quad ; \quad \theta = \frac{\pi}{4} \leftarrow n = 0$$



$$z = -1 - i$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x} = 1$$

$$\theta = \frac{\pi}{4} + n\pi, n = 0, \pm 1, \pm 2$$

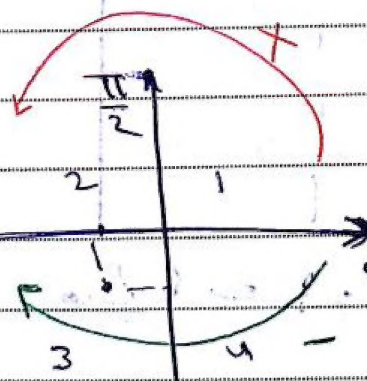
$$\theta = \frac{\pi}{4} \quad n = 0$$

$$\theta = \frac{\pi}{4} + \pi \quad n = 1$$

$$= \frac{5\pi}{4} \neq \pi$$

$$\theta = \frac{\pi}{4} - \pi \quad n = -1$$

$$= -\frac{3\pi}{4}$$



$$-\pi < \theta \leq \pi$$

$$\frac{\pi}{4} - \pi$$



الأساسية العامة:

الحل العام للمعادلة التفاضلية « ذات أمثلا متغيرة »

$$a_n(x)y^{(n)} + \dots + a_1(x)y' + a_0y = F(x)$$

$$y = y_h + y_p$$

الحل الخاص

الحل العام للمعادلة التفاضلية المتجانسة

$$y_h = A_1y_1 + A_2y_2 + \dots + A_ny_n$$

الحل الخاص

إيجاد الحل الخاص  $y_p$  عن طريق لاغرانج:

~~و~~

$$y_p = y_1 \int \frac{w_1}{w} dx + y_2 \int \frac{w_2}{w} dx + \dots + y_n \int \frac{w_n}{w} dx$$

حيث  $y_1, y_2, \dots, y_n$  حل للمعادلة المتجانسة و  $w$  محدد فريني

$$w(y_1, y_2, y_3, \dots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & y_3' & \dots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' & \dots & y_n'' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & y_3^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

حيث  $a_n(x) = 1$

$w_1 =$

$$\begin{vmatrix} 0 & y_2 & y_3 & \dots & y_n \\ 0 & y_2' & y_3' & \dots & y_n' \\ 0 & y_2'' & y_3'' & \dots & y_n'' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & y_2^{(n-1)} & y_3^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \\ F(x) & 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

$w_2 =$

$$\begin{vmatrix} y_1 & 0 & y_3 & \dots & y_n \\ y_1' & 0 & y_3' & \dots & y_n' \\ y_1'' & 0 & y_3'' & \dots & y_n'' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & 0 & y_3^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \\ 0 & F(x) & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$



$$4x y'' + 2y' + y = 1 \quad \text{نريد إيجاد الحل العام للمعادلة}$$

إذا علمت أن هذا معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية

$$y = y_h + y_p \quad \text{و} \quad y_h = A_1 y_1 + A_2 y_2$$

نأخذ المعادلة التفاضلية

$$4x y'' + 2y' + y = 0$$

$$y'' + \frac{1}{2x} y' + \frac{1}{4x} y = 0$$

نستخدم طريقة ليوفيل

$$y_h = y_1 \left[ \int \frac{C_1 e^{-\int p(x) dx}}{(y_1)^2} dx + C_2 \right]$$

$$e^{-\int p(x) dx} = e^{-\frac{1}{2} \int \frac{1}{x} dx} = e^{-\frac{1}{2} \ln x} = e^{\ln x^{-\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$y_h = \sin \sqrt{x} \left[ C_1 \int \frac{dx}{\sqrt{x} \sin^2 \sqrt{x}} + C_2 \right]$$

$$t = \sqrt{x} \Rightarrow dt = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx \Rightarrow 2dt = \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

$$y_h = \sin \sqrt{x} \left[ 2C_1 \int \frac{dt}{\sin^2 t} + C_2 \right]$$

$$y_h = \sin \sqrt{x} [-2C_1 \cot t + C_2]$$

$$y_h = \sin \sqrt{x} \left[ C_0 \frac{\cos \sqrt{x}}{\sin \sqrt{x}} + C_2 \right] \quad \text{و} \quad C_0 = -2C_1$$

$$y_h = C_0 \cos \sqrt{x} + C_2 \sin \sqrt{x}$$

$$y_h = A y_1 + A_2 y_2$$

وهو الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$y_1 = \sin \sqrt{x} \quad y_2 = \cos \sqrt{x}$$

لإيجاد الحل الخاص  $y_p$  نستخدم طريقة



$$y'' + \frac{1}{2u} y' + \frac{1}{4u} y = \frac{1}{4u} \quad ; F(u) = \frac{1}{4u}$$

$$W(y_1, y_2) = W(\sin \sqrt{u}, \cos \sqrt{u}) = \begin{vmatrix} \sin \sqrt{u} & \cos \sqrt{u} \\ \frac{1}{2\sqrt{u}} \cos \sqrt{u} & -\frac{1}{2\sqrt{u}} \sin \sqrt{u} \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{u}} \sin^2 \sqrt{u} - \frac{1}{2\sqrt{u}} \cos^2 \sqrt{u} = -\frac{1}{2\sqrt{u}} = W$$

$$w_1 = \begin{vmatrix} 0 & -\cos \sqrt{u} \\ \frac{1}{4u} & -\frac{1}{2\sqrt{u}} \sin \sqrt{u} \end{vmatrix} = -\frac{1}{4u} \cos \sqrt{u}$$

$$w_2 = \begin{vmatrix} \sin \sqrt{u} & 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{u}} \cos \sqrt{u} & \frac{1}{4u} \end{vmatrix} = \frac{1}{4u} \sin \sqrt{u}$$

$$y_p = y_1 \int \frac{w_1}{W} du + y_2 \int \frac{w_2}{W} du$$

$$= \sin \sqrt{u} \int \frac{-\frac{1}{4u} \cos \sqrt{u}}{-\frac{1}{2\sqrt{u}}} du + \cos \sqrt{u} \int \frac{\frac{1}{4u} \sin \sqrt{u}}{-\frac{1}{2\sqrt{u}}} du$$

$$y_p = \sin \sqrt{u} \int \frac{\sqrt{u}}{2u} \cos \sqrt{u} du - \cos \sqrt{u} \int \frac{\sqrt{u}}{2u} \sin \sqrt{u} du$$

$$y_p = \sin \sqrt{u} \int \frac{\cos \sqrt{u}}{2\sqrt{u}} du - \cos \sqrt{u} \int \frac{\sin \sqrt{u}}{2\sqrt{u}} du$$

$$t = \sqrt{u} \Rightarrow dt = \frac{1}{2\sqrt{u}} du$$



$$y_p = \sin \sqrt{x} \int \cos t \, dt + \cos \sqrt{x} \int \sin t \, dt$$

$$y_p = \sin \sqrt{x} + \cos \sqrt{x} = 1$$

وهذا الحل العام للمعادلة هو

$$y = y_h + y_p$$

$$y = C_1 \cos \sqrt{x} + C_2 \sin \sqrt{x} + 1$$

طريقة التفتيش (المعادلة المتجانسة)

$$P_n(x) y^{(n)} + \dots + P_1(x) y' + P_0(x) y = 0$$

1. الحالة الأولى: نفرض

$y = x$  تكون هلاً خاصاً إذا وافقت إذا حققت

$$P_1(x) + x P_0(x) = 0$$

$$y = x^2$$

$$\frac{2!}{0!} P_2(x) + \frac{2!}{1!} x P_1(x) + \frac{2!}{2!} x^2 P_0(x) = 0$$

$$y = x^3$$

$$\frac{3!}{0!} P_3(x) + \frac{3!}{1!} x P_2(x) + \frac{3!}{2!} x^2 P_1(x) + \frac{3!}{3!} x^3 P_0(x) = 0$$

$$y = x^4$$

2. الحالة الثانية: إذا كانت المعادلة من الشكل

$$P_2(x) y'' + P_1(x) y' + P_0(x) y = 0$$

$y = e^{mx}$  تكون هلاً خاصاً إذا وافقت إذا كانت

$$P_2(m) m^2 + P_1(m) m + P_0(m) = 0$$

نصل على معادلة من الدرجة الثانية بالمتغير  $m$

نفس جذور المعادلة

إذا كانت الجذور متعلقة بـ  $x$  نضربها

بـ  $x$  نضربها



الحالة الثالثة:  $y = \sin x$  مشتقة عند الزاوية  $\pi/2$  حيث الحالة  
ثم نعود من المشتقات في المعادلة إذا حقيقة المعادلة تكون  
 $y = \sin x$  حالة خاصة

Tip:  $y = \sin x$

الحالة الرابعة:  $y = \cos x$

1. لِيُؤْتَى نَسْتَعِزُّ بِالْمَعَادِلَةِ مِنَ الرَّبِّهِ الثَّانِيَةِ فَقَطْ «  
عَرَبِيَّ: أَحْصِ عَلَى الْمَعَادِلَةِ التَّضَامِلَةِ.

$$x^3 y''' - 3x^2 y'' + 6xy' - 6y = 0$$

قلب طرحة التفتيش

$$P_3 = x^3, P_2 = -3x^2, P_1 = 6x, P_0 = -6$$

نقطة  $y = x$  تكون على إحداهما إذا وقطعها

$$p_1(n) + n p_2(n) = 0$$

$$6n + n(-6) = 0 \Rightarrow 0 = 0$$

Impie il p.  $y_1 = a$  cioè

نقطة من  $y = x^2$  تكون ملاصقة

$$\frac{2!}{0!} p_2 + \frac{2!}{1!} \cdot x p_1 + \frac{2!}{2!} \cdot x^2 p_0 = 0$$

$$2(-3x^2) + 2x(6x) + m^2(-6) = 0$$

$$-6x^2 + 12x - 6x^2 = 0 \quad \therefore \Rightarrow 0 = 0$$

Ex 10.10:  $y = \hat{u} \cdot \sin$

$y = x^3$  فرض

~~$$\frac{3!}{0!} p_3 + \frac{3!}{1!} n p_2 + \frac{3!}{2!} n^2 p_1 + \frac{3!}{3!} n^3 p_0 = 0$$~~

$$6x^3 + 6x(-3x^2) + 3x^2(6x) + x^3(-6) = 0$$

○ ○ = ○

•  $\hat{y}_j = x_j^3$  since

رَبَّنَا الْعَادِلَةَ عَلَيْنَا

الحل العام للـ  $y'' = 0$  هو  $y = y_h = A_1 y_1 + A_2 y_2 + A_3 y_3$  ،

$$= A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3$$



نريد أن نرى هل المعادلة التفاضلية:

$$(x-1)y'' - (x+1)y' + 2y = 0$$

الكل، نوجد الحل العام للتجانس  $y = x$  نقرضه  
نقرضه  $y = e^x$  يكون حلًا خاصًا

$$P_1(x) + \alpha P_2(x) = 0$$

$$-(x+1) + 2x = 0 \Rightarrow x = 1 \neq 0$$

نقرضه  $y = e^x$  يكون حلًا خاصًا إذا كانت  $x$

$$(x-1)m^2 - (x+1)m + 2 = 0$$

$$xm^2 - m^2 - xm - m + 2 = 0$$

$$xm^2 - m^2 - xm - m + 2 = 0$$

$$-[m^2 + m - 2] + \alpha m[m-1] = 0$$

$$-(m-1)(m+2) + \alpha m[m-1] = 0$$

$$(m-1)[m-2 + \alpha m] = 0$$

$$m-1 = 0 \Rightarrow m=1$$

أو  $y_1 = e^x$  نقرضه  $y_2 = e^x$

$$m-2 + \alpha m = 0$$

$$m(-1 + \alpha) = 2 \Rightarrow m = \frac{2}{-1 + \alpha}$$

نوجد  $y_2$  بـ  $y_1$  أو  $y_1 = e^x$

$$y_2 = y_1 \left[ \int \frac{C_1 e^{-\int \frac{p(x)}{y_1} dx} + C_2}{(y_1)^2} dx \right]$$

$$P_1(x) = -\frac{x+1}{x+1}$$

$$= e^x \left[ C_1 \int \frac{e^{-\int \frac{x+1}{x+1} dx}}{e^{2x}} dx + C_2 \right]$$

$$\int \frac{x+1}{x+1} dx = \int 1 dx = x$$

$$\frac{x-1}{x+1} = \frac{x+1}{x+1} - \frac{2}{x+1}$$

نقسمه

$$x+2 \ln(x-1)$$

$$= e^x (x-1)^2$$

$$\frac{x+1}{x+1}$$

$$0+2$$



$$y_2 = e^x [c_1 \int e^{-2x} (e^x (x^2 + 1)) dx + c_2]$$

$$= e^x [c_1 \int e^{-x} (x^2 + 1) dx + c_2]$$

$$= e^x [c_1 \int e^{-x} x^2 dx - 2 \int e^{-x} dx + \int e^{-x} dx + c_2]$$

$$\int e^{-x} x^2 \Rightarrow u = x^2 \Rightarrow du = 2x dx$$

$$dv = e^{-x} dx \Rightarrow v = -e^{-x}$$

$$= x^2 e^{-x} - 2 \int x e^{-x} dx$$

$$y_2 = e^x [c_1 (-x^2 e^{-x} + 2 \int x e^{-x} dx - 2 \int e^{-x} dx + \int e^{-x} dx + c_2)]$$

$$= e^x [c_1 (-x^2 e^{-x} - e^{-x}) + c_2]$$

$$= e^x (c_1 e^{-x} (-x^2 - 1) + c_2)$$

$$= -c_1 (x^2 + 1) + c_2 e^x \quad ; \quad c_1 = c_0$$

$$\Rightarrow y_2 = c_0 (x^2 + 1) + c_2 e^x$$



$$(x-1)y'' - xy' + y = (x-1)^2 e^x \quad \text{حل طرق التفاضل}$$

$$P_2(x) = x-1, \quad P_1(x) = -x, \quad P_0(x) = 1$$

نقترح  $y = x$  كحل أولي

$$P_1(x) + x P_0(x) = 0$$

$$-x + x(1) = 0 \Rightarrow 0 = 0$$

نقترح  $y = x^2$  كحل ثاني

نقترح  $y = x^2$  كحل ثالث

$$\frac{2!}{0!} P_0(x) + \frac{2!}{1!} x P_1(x) + \frac{2!}{2!} x^2 P_2(x) = 0$$

$$2(x-1) + 2x(-x) + x^2(1) = 2x - 2 - 2x^2 + x^2$$

$$= -x^2 + 2x - 2 \neq 0$$

نقترح  $y = e^{mx}$  كحل رابع

$$(x-1)m^2 - xm + 1 = 0$$

نقترح  $y = e^{mx}$  كحل رابع

$$m^2 x - m^2 - xm + 1 = 0$$

$$(m^2 - 1) + m^2 x - xm = 0 \Rightarrow$$

$$(m^2 - 1) + xm(m-1) = 0$$

$$(m-1)(m+1) + xm(m-1) = 0$$

$$(m-1)[-m-1 + xm] = 0$$

$$\text{لـ } m-1 = 0 \Rightarrow m=1 \Rightarrow y_1 = e^x$$

$$\text{لـ } -m-1 + xm = 0$$

$$m(x-1) = 1$$

$$m = \frac{1}{x-1} \quad \text{مفرد}$$

$$y_h = A_1 x + A_2 e^x$$

$$y_p = y_1 \int \frac{w_1}{w} dx + y_2 \int \frac{w_2}{w} dx$$

$$y'' = x$$

$$y' + \frac{1}{x-1} y = (x-1)e^x$$

Alamal



$$w(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} x & e^x \\ 1 & e^x \end{vmatrix} = x e^x - e^x = e^x(x-1)$$

$$w_1 = \begin{vmatrix} 0 & e^x \\ (n-1)e^x & e^x \end{vmatrix} = -e^x(n-1)$$

$$w_2 = \begin{vmatrix} x & 0 \\ 1 & (n-1)e^x \end{vmatrix} = x e^x(n-1)$$

$$y_p = n \int \frac{-e^x(n-1)}{e^x(n-1)} + e^x \int \frac{x e^x(n-1)}{e^x(n-1)}$$

$$= n(-e^x) + e^x \left( \frac{x^2}{2} \right)$$

$$= n e^x \left( \frac{x}{2} - 1 \right)$$

$$y = A_1 x + A_2 e^x + n e^x \left( \frac{x}{2} - 1 \right)$$



# المعادلة التفاضلية

الحل العام للمعادلة المتجانسة على هيئة كثيرات حدود  
الدرجة n

$y = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$   
نشتق عدد من المرات متساوي رتبة المعادلة ثم نعوض في المعادلة التفاضلية  
ونظائره أمثال أعلى أسس بالضغط فنحصل على معادلة متجانسة  
ثم نختب عدد المعادلة

إذا كانت قيم n :  
1- n = 1 : نفرض  $y = 1$  ونشتق عدد من المرات متساوي رتبة المعادلة  
ثم نعوض في المعادلة إذا صفت المعادلة يكون  $y = \frac{1}{x}$  حلاً عاماً  
لمعادلة المتجانسة

2- أما إذا كانت قيم n سالبة  $n = -1$  فنفرض  $y = \dots$

3- أما إذا كانت قيم n سالبة  $n = -1$  فنفرض  $y = \dots$

4- أما إذا كانت قيم n سالبة  $n = -1$  فنفرض  $y = \dots$

5- أما إذا كانت قيم n سالبة  $n = -1$  فنفرض  $y = \dots$

نشتق عدد من المرات متساوي رتبة المعادلة ونعوض ونفرض التواب  
أصبح حل المعادلة التفاضلية التالية إذا كانت أنشأ على حلول خاصة على  
هذه كثيرات حدود المعادلة المتجانسة

$$x(x^2 + 1)y'' + 2y' - 2xy = 0$$

$$(x^3 + x)y'' + 2y' - 2xy = 0$$

$$y = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$$

$$y' = nx^{n-1} + \dots$$

$$y'' = n(n-1)x^{n-2} + \dots$$

نعوض كل من  $y, y', y''$  في المعادلة التفاضلية

$$n(n-1)x^{n+1} + \dots + 2nx^{n-1} + \dots - 2x^{n+1} = 0$$

$$(n^2 - n - 2)x^{n+1} = 0 \Rightarrow (n^2 - n - 2) = 0$$

$$(n-2)(n+1) = 0$$



أما  $n = -1 \Leftrightarrow n+1=0$  نفرض  $y = \frac{1}{x}$   
 $y'' = \frac{2}{x^3} \Leftrightarrow y' = \frac{-1}{x^2} \Leftrightarrow y = \frac{1}{x}$   
 نفرض  $y, y', y''$  في المعادلة.

$\Rightarrow 2 + \frac{2}{x^2} - \frac{2}{x^2} - 2 = 0 \Rightarrow 0 = 0$   
 هو حل خاص  $y_1 = \frac{1}{x}$

أما  $n = 2 \Leftrightarrow n-2=0$  نفرض  $y = x^2 + Ax + B$   
 $y' = 2x + A$   
 $y'' = 2$

نفرض  $y, y', y''$  في المعادلة (لإيجاد قيم الثوابت  $A, B, C$ )  
 $\Rightarrow 2x^3 + 2x + 4x + 2A - 2x^3 - 2Ax^2 - 2Bx = 0$   
 $-2Ax^2 + (6 + 2B)x + 2A = 0$   
 نظام المعادلات التالي:

$-2A = 0 \Rightarrow A = 0$

$6 + 2B = 0 \Rightarrow B = -3$

$2A = 0 \Rightarrow A = 0$

$y_2 = x^2 + 3$

$y = y_h = A_1 \frac{1}{x} + A_2 (x^2 + 3)$

أوجد الحل العام للمعادلة :

$$(2x+1)^2 y'' - 2(2x+1)y' + 4y = 0$$

إذا علمت أن للمعادلة الجانبة المتأخرة حل فاقم على صيغة كثير الحدود الكلي.

$$(4x^2 + 4x + 1)y'' + (-4x - 2)y' + 4y = 0$$

$$y = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$$

$$y' = nx^{n-1} + \dots$$

$$y'' = n(n-1)x^{n-2} + \dots$$

نعوض بالمعادلة

$$4n(n-1)x^n + \dots + 4nx^n + \dots + 4x^n + \dots = 0$$

$$(4n^2 - 4n)x^n - 4nx^n + 4x^n = 0$$

$$x^n(4n^2 - 4n - 4n + 4) = 0$$

$$4n^2 - 8n + 4 = 0$$

$$n^2 - 2n + 1 = 0 \Rightarrow (n-1)^2 = 0$$

$$n=1$$

$$y = x + A \Rightarrow y' = 1 \Rightarrow y'' = 0$$

$$\Rightarrow -4x - 2 + 4x + 4A = 0$$

$$-2 + 4A = 0 \Rightarrow A = \frac{1}{2}$$

$$y_1 = x + \frac{1}{2}$$

معدل فاقم

لإيجاد الحل الخاص الثاني  $y_2$

$$y'' - \frac{2}{2x+1}y' + \frac{1}{(2x+1)^2}y = 0$$

$$y_h = y_1 \int \frac{1}{y_1^2} dx$$

$$y_h = x + \frac{1}{2} \int \frac{1}{(x + \frac{1}{2})^2} dx$$



$$\int \frac{2}{2x+1} dx = \ln(2x+1)$$

$$y_h = x + \frac{1}{2} \left[ C_1 \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx + C_2 \right]$$

$$y_h = x + \frac{1}{2} [C_1 \ln(x^2+x+1) + C_2]$$

$$y_h = \left(x + \frac{1}{2}\right) \ln(x^2+x+1) C_1 + \left(x + \frac{1}{2}\right) C_2$$

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} 1 & \sin u \\ 0 & \cos u \end{vmatrix} = \cos u$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & \sin u \\ \cos u \cot u & \cos u \end{vmatrix} = -\sin u \cos u \cot u$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos u \cot u \end{vmatrix} = \cos u \cot u$$

$$y_p = \frac{1}{\cos u} \int \frac{-\sin u \cos u \cot u}{\cos u} du + \sin u \int \frac{\cos u \cot u}{\cos u} du$$

$$= \int -\sin u \cot u du + \sin u \int \cot u du$$

$$= -\int \sin u \frac{\cos u}{\sin u} du + \sin u \int \frac{\cos u}{\sin u} du$$

$$= -\sin u + \sin u \ln(\sin u)$$



## المعادلة التفاضلية الآتية

Example

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$\sin x y'' + 3 \cos x y' = 2 \sin x y = 5 \cos x$$

مع التأكيد من أن  $y = 0$  هو حل

$$\sin x y'' + 3 \cos x y' - 2 \sin x y = 5 \cos x$$

$$\frac{d}{dx} (\sin x y') = \sin x y'' + \cos x y'$$

بالضرب

$$y'' = y' \quad y'' = y'$$

$$\frac{d}{dx} (y \cos x y')$$

$$y \cos x y' + \sin x y'$$

بالضرب

$$y \cos x y' + \sin x y'$$

$$y \cos x y' + \sin x y'$$

$$\sin x y'' + 3 \cos x y' = \int 5 \cos x dx + C$$

معادلة تكامل أولى

$$\sin x y' + 3 \cos x y = 5 \sin x + C$$

معادلة تفاضلية من الدرجة الأولى (نقوم بالتكامل مرة أخرى)

$$\frac{1}{\sin x} \left( y' + 3 \cos x y \right) = 5 + \frac{C}{\sin x}$$

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{y \cos x}{\sin x} \right) = \frac{y' \cos x - y \sin x}{\sin^2 x} = \frac{y' \cos x}{\sin^2 x} - \frac{y \sin x}{\sin^2 x}$$

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{y \cos x}{\sin x} \right) = \frac{y' \cos x}{\sin^2 x} - \frac{y \sin x}{\sin^2 x}$$

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{y \cos x}{\sin x} \right) = \frac{y' \cos x}{\sin^2 x} - \frac{y \sin x}{\sin^2 x}$$

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{y \cos x}{\sin x} \right) = \frac{y' \cos x}{\sin^2 x} - \frac{y \sin x}{\sin^2 x}$$

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{y \cos x}{\sin x} \right) = \frac{y' \cos x}{\sin^2 x} - \frac{y \sin x}{\sin^2 x}$$

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{y \cos x}{\sin x} \right) = \frac{y' \cos x}{\sin^2 x} - \frac{y \sin x}{\sin^2 x}$$

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{y \cos x}{\sin x} \right) = \frac{y' \cos x}{\sin^2 x} - \frac{y \sin x}{\sin^2 x}$$

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{y \cos x}{\sin x} \right) = \frac{y' \cos x}{\sin^2 x} - \frac{y \sin x}{\sin^2 x}$$

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{y \cos x}{\sin x} \right) = \frac{y' \cos x}{\sin^2 x} - \frac{y \sin x}{\sin^2 x}$$

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{y \cos x}{\sin x} \right) = \frac{y' \cos x}{\sin^2 x} - \frac{y \sin x}{\sin^2 x}$$

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{y \cos x}{\sin x} \right) = \frac{y' \cos x}{\sin^2 x} - \frac{y \sin x}{\sin^2 x}$$

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{y \cos x}{\sin x} \right) = \frac{y' \cos x}{\sin^2 x} - \frac{y \sin x}{\sin^2 x}$$

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{y \cos x}{\sin x} \right) = \frac{y' \cos x}{\sin^2 x} - \frac{y \sin x}{\sin^2 x}$$

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{y \cos x}{\sin x} \right) = \frac{y' \cos x}{\sin^2 x} - \frac{y \sin x}{\sin^2 x}$$



$$\sin x y = 5 \left[ \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} \sin 2x \right] - C \cos x + C_1$$

$$\sin x y = \frac{5}{2} x - \frac{5}{4} \sin 2x - C \cos x + C_1$$

$$y = \frac{5x}{2 \sin x} - \frac{5 \sin 2x}{4 \sin x} - C \frac{\cos x}{\sin x} + C_1 \frac{1}{\sin x}$$

$$y = \frac{5x}{2 \sin x} - \frac{5 \sin 2x}{4 \sin x} - C \frac{\cos x}{\sin x} + C_1 \frac{1}{\sin x}$$

مثال: أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$(x^2 + 2)y'' + 4xy' + 2y = \sin x$$

مع الشروط الابتدائية:

$$\frac{d}{dx} (x^2 + 2)y' + 4xy' + 2y = \sin x$$

بالضرب

$$0 + 2x^2 y' + 4xy' + 2y = \sin x$$

$$\frac{d}{dx} (x^2 + 2)y' + 4xy' + 2y = \sin x$$

بالضرب

$$0 + 2x^2 y' + 4xy' + 2y = \sin x$$

فالمعادلة تصبح:

$$(x^2 + 2)y' + 2xy = -\cos x + C$$

في متادالة تكامل أولي:

$$y' + \frac{2x}{x^2 + 2} y = \frac{-\cos x}{x^2 + 2} + \frac{C}{x^2 + 2}$$

$$\mu = e^{\int \frac{2x}{x^2 + 2} dx} = e^{\ln(x^2 + 2)} = (x^2 + 2)$$

$$[(x^2 + 2)y]' = -\cos x + C \Rightarrow$$

Alamal



$$(a^2 + 2) y = -\sin x + \cos x + C_1$$

$$y = \frac{-\sin x}{a^2 + 2} + C \frac{1}{a^2 + 2}$$

« Note »

وقت كتابة المادة التامة من الامتحان  
 امثلة كالتالي:  $y = \sin x$  و  $y = \cos x$   
 « في الامتحان فاحرص من كتابة  
 « في الامتحان فاحرص من كتابة  
 « في الامتحان فاحرص من كتابة »

$$y = y_1 + y_2 + y_3$$

«homework»

$$y'' + \tan y = \cos x \cdot \cot x$$

$$y' = y \Rightarrow y = e^x$$

« في الامتحان فاحرص من كتابة  
 « في الامتحان فاحرص من كتابة  
 « في الامتحان فاحرص من كتابة »

$$y'' + p(x)y' = q(x)$$

$$y'' + \tan x \cdot y' = \cos x \cot x$$

$$z = y' \Rightarrow z' = y''$$

$$z' + \tan x \cdot z = \cos x \cot x$$

$$\int \frac{\tan x \, dx}{\cos x} = \int \frac{\sin x \, dx}{\cos x} = -\ln |\cos x| = \ln |\sec x|$$

$$= \ln |\sec x|$$

$$\left[ \frac{1}{\cos x} z \right]' = \cot x \Rightarrow \frac{1}{\cos x} z = \int \cot x \, dx$$

$$\frac{1}{\cos x} z = \ln |\sin x| + C$$

$$y' = z = \cos x \ln |\sin x| + C \cos x$$

$$y = \int (\cos x \ln |\sin x| + C \cos x) \, dx = C_1 \sin x + C_2$$

$$t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x \, dx$$

$$\int \cos x \ln |\sin x| \, dx = \int \ln t \cdot dt = t \ln t - t$$

$$u = \ln t \Rightarrow du = \frac{dt}{t}$$

$$v = dt \Rightarrow v = t$$



$$( \dots ) y'' + ( \dots ) y' = 0$$

$$\boxed{y_1 = 1} \quad , \quad ,$$

$$y = \underbrace{\sin x}_{y_p} \ln \sin x \rightarrow \sin x + \underbrace{C_1 \sin x + C_2}_{y_h}$$

$$y'' + \tan x \cdot y' = \cos x \cdot \cot x \quad \text{---} \quad \text{---}$$

نأخذ المعادلة المتجانسة في البداية

$$y'' + \tan x \cdot y' = 0$$

$$y_1 = 1$$

$$y'_1 = 0$$

$$y''_1 = 0$$

حسب ليوڤيل استنادا الى

$$y_h = y_1 \left[ \int \frac{e^{-\int P(x) dx}}{(y_1)^2} dx + C_2 \right]$$

$$= \int \tan x \cdot \frac{1}{e^{\int \tan x dx}} dx$$

$$= \int \cos x = \sin x$$

$$y_h = 1 \cdot \left[ C_1 \int \frac{\cos x}{1} dx + C_2 \right]$$

$$y_h = C_1 \sin x + C_2$$

وهذا هو الحل المتجانس

$y_p$  --- لا نحتاج [أيضا]  $y_p$  فكل شيء ( $\rightarrow$ )

$$= \sin x + \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \cos x = 0$$

$$0 = 0$$

$$y = \sin x$$

$$y' = \cos x$$

$$y'' = -\sin x$$

Alamal

$$\Rightarrow y_1 = \sin x$$

$$\frac{y}{x} = \frac{u}{v}$$

أولاً المعادلة التفاضلية:

$$(\sin x - \cos x) y' - 2 \sin x y + (\cos x + \sin x) y = 0$$

$$(\sin x - \cos x) y' - 2 \sin x y + (\cos x + \sin x) y = 0$$

$$p_1 + x p_0 = 0$$

$$x y' = y$$

نقلاً  $y = e^{mx}$

$$(\sin x - \cos x) m^2 - 2 \sin x m + (\cos x + \sin x) = 0$$

$$\sin x m^2 - \cos x m^2 - 2 \sin x m + \cos x + \sin x = 0$$

$$\sin x (m^2 - 2m + 1) - \cos x (m^2 - 1) = 0$$

$$\sin x (m-1)^2 - \cos x (m-1)(m+1) = 0$$

$$(m-1) [\sin x (m-1) - \cos x (m+1)] = 0$$

$$m=1 \quad \text{أو} \quad m=-1$$

$$\text{أو} \quad y = e^x$$

$$m \sin x - \sin x - m \cos x = \cos x = 0$$

$$m(\sin x - \cos x) = \sin x + \cos x \Rightarrow m = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$$

$$m = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$$

نقلاً  $y = \sin x$

$$y = \cos x$$

$$y = -\sin x$$

$$y = \sin x, y = \cos x, y = -\sin x$$



$$-\sin x + \cos x \sin x - 2 \sin x \cos x + \sin x \cos x + \sin^2 x = 0$$

$y_2 = \sin x$   $y_2 = \sin x$   $y_2 = \sin x$   
 لا بد ان  $y_2 = \sin x$   $y_2 = \sin x$   $y_2 = \sin x$   
 لا بد ان  $y_2 = \sin x$   $y_2 = \sin x$   $y_2 = \sin x$

$$y'' - 2 \sin x y' + \cos x \sin x y = (1 - \sin^2 x) e^{\sin x}$$

$$W(y_1, y_2) = W(e^{\sin x}, \sin x) = \begin{vmatrix} e^{\sin x} & \sin x \\ e^{\sin x} \cos x & \cos x \end{vmatrix} = e^{\sin x} (\cos^2 x - \sin^2 x) = e^{\sin x} \cos 2x$$

$$= e^{\cos x} - e^{\sin x} = e^{\sin x} (\cos x - \sin x)$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ (1 - \sin^2 x) e^{\sin x} & \cos x \end{vmatrix} = -\sin x e^{\sin x} (1 - \sin^2 x) = \frac{\sin x e^{\sin x} \cos x}{\sin x - \cos x}$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} e^{\sin x} & 0 \\ (1 - \sin^2 x) e^{\sin x} & \sin x - \cos x \end{vmatrix} = \frac{e^{\sin x} (1 - \sin^2 x)}{\sin x - \cos x}$$

$$\int \sqrt{1 - \sin x} \, dx$$

$$y_p = y_1 \int \frac{w_1}{w} dx + y_2 \int \frac{w_2}{w} dx$$

$$y_p = e^x \int \frac{\sin x \cdot e^{2x} (1 - \sin x)}{\sin x \cdot \cos x} dx + \sin x \int \frac{\sin x}{e^x (\cos x - \sin x)} dx$$

$$y_p = e^x \left( \frac{\sin x (1 - \sin x)}{(\cos x - \sin x)^2} dx - \sin x \int \frac{e^x (1 - \sin x)}{(\cos x - \sin x)^2} dx \right)$$

$$1 - \sin x = \sin^2 x + \cos^2 x - 2 \sin x \cdot \cos x = (\cos x - \sin x)^2$$

$$y_p = e^x \int \sin x \, dx - \sin x \int e^x dx$$

الطور الثاني

$$D_n y = \frac{1}{x}$$

المعادلة التفاضلية ذات افعال ثابتة  $y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = F(x)$

$$D^n y = y^{(n)}, D^2 y = y'', D y = y'$$

$$D^n y + a_{n-1} D^{n-1} y + \dots + a_1 D y + a_0 y = F(x)$$

$$[D^n + \dots + a_1 D + a_0] y = F(x)$$



$$\Rightarrow \underline{\phi(D)} y = F(x)$$

$$\phi(D) \cdot e^{mx} = \phi(m) e^{mx}$$

$$[D^3 + 5D^2 + 6] e^{2x} = [2^3 + 5 \cdot 2^2 + 6] e^{2x} = 34 e^{2x}$$

$$\therefore [D^3 + 5D^2 + 6] e^{2x} = 34 e^{2x}$$

$$[8D^3 + 5 \cdot 4D^2 + 6] e^{2x} = 34 e^{2x}$$

$$\phi(D^2) \frac{\cos mx}{\sin mx} = \phi(-m^2) \frac{\cos mx}{\sin mx}$$

$$[D^4 + 6D^3 + 2D^2 + D] \sin x$$

$$[D^3 \cdot D^2 + 6D \cdot D^2 + 2D^2 + D] \sin x \quad m=1, m^2=1$$

$$[1 - 6D - 2 + D] \sin x$$

$$[-5D - 1] \sin x = [-5 \cos x - \sin x]$$

~~$\phi(D) = \phi(D)$~~

~~$\phi(D) = \phi(D)$~~

$$\phi(D) \frac{sh}{ch} m x = \phi(m^2) \cdot \frac{sh}{ch} m x \quad (3)$$

حالة التفرع الأولى (4)

$$\phi(D) \cdot e^{mx} \cdot V(x) = e^{mx} \cdot \phi(D+m) \cdot V(x)$$

$$\star) \phi(D) \cdot x \cdot V(x) = x \cdot \phi(D) \cdot V(x) + \phi(D) \cdot V(x) \quad (5)$$

$$\star) \phi(D) \cdot x^2 \cdot V(x) = x^2 \cdot \phi(D) \cdot V(x) + 2x \cdot \phi(D) \cdot V(x) + \phi(D) \cdot V(x)$$

$$\phi(D) \cdot x^3 \cdot V(x) = x^3 \cdot \phi(D) \cdot V(x) + 3x^2 \cdot \phi(D) \cdot V(x) + 3x \cdot \phi(D) \cdot V(x) + \phi(D) \cdot V(x)$$

$$\phi(D) \cdot x^4 \cdot V(x) = x^4 \cdot \phi(D) \cdot V(x) + 4x^3 \cdot \phi(D) \cdot V(x) + 6x^2 \cdot \phi(D) \cdot V(x) + 4x \cdot \phi(D) \cdot V(x) + \phi(D) \cdot V(x)$$

$$\phi(D) \cdot x^5 \cdot V(x) = x^5 \cdot \phi(D) \cdot V(x) + 5x^4 \cdot \phi(D) \cdot V(x) + 10x^3 \cdot \phi(D) \cdot V(x) + 10x^2 \cdot \phi(D) \cdot V(x) + 5x \cdot \phi(D) \cdot V(x) + \phi(D) \cdot V(x)$$

$$\phi(D) \cdot x^6 \cdot V(x) = x^6 \cdot \phi(D) \cdot V(x) + 6x^5 \cdot \phi(D) \cdot V(x) + 15x^4 \cdot \phi(D) \cdot V(x) + 20x^3 \cdot \phi(D) \cdot V(x) + 15x^2 \cdot \phi(D) \cdot V(x) + 6x \cdot \phi(D) \cdot V(x) + \phi(D) \cdot V(x)$$

$$\phi(D) \cdot x^7 \cdot V(x) = x^7 \cdot \phi(D) \cdot V(x) + 7x^6 \cdot \phi(D) \cdot V(x) + 21x^5 \cdot \phi(D) \cdot V(x) + 35x^4 \cdot \phi(D) \cdot V(x) + 35x^3 \cdot \phi(D) \cdot V(x) + 21x^2 \cdot \phi(D) \cdot V(x) + 7x \cdot \phi(D) \cdot V(x) + \phi(D) \cdot V(x)$$



$$(D^2 + D + 1) x \cdot e^x$$

$$= e^x \int (D+1)^2 + (D+1) + 1 \} x$$

$$= e^x \int D^2 + 3D + 3 \} x = e^x \int 0 + 3 + 3x \}$$

$$= e^x \int 3 + 3x \}$$

$$D(D) \cdot x \cdot e^x = x \cdot D(D \cdot x \cdot e^x) + D^2(D \cdot x \cdot e^x)$$

$$\int D^2 + D + 1 \} x \cdot e^x = x \int D^2 + D + 1 \} e^x + [2D + 1] e^x$$

$$= x \int 3 e^x + [3] e^x$$

$$= e^x \int 3x + 3 \}$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac, \sqrt{\Delta} > 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\sqrt{\Delta} = 0$$

$$x_1 = x_2 =$$

$$\sqrt{\Delta} < 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Alamal

$$-x^2 + (2+i)x + (1-i) = 0$$

$$A = \frac{(2+i)^2 - 4(1-i)}{4}$$

$$Ax^2 + Bx + C = 0$$

$$(x-x_1)(x-x_2) = 0$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{B}{A}$$

$$x^2 + ix + 1 = 0$$

$$\Delta = 1 - 4 = -3 = 3i^2 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = i\sqrt{3}$$

$$x_1 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

$$1 - 3 + 3 - 1 = 0$$

$$0 = 0$$

$$x_1 = 1$$

$$(x-1) \left[ \frac{x^2 + 3x - 1}{x-1} \right] = 0$$



1 1

$$\begin{array}{r} x^2 - 2x + 1 \\ x-1 \overline{) x^3 - 3x^2 + 3x - 1} \\ \underline{-x^2 + x} \phantom{-1} \\ \phantom{x^3 - 3x^2 + } 2x - 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -2x^2 + 3x - 1 \\ + 2x^2 + 2x \\ \hline \phantom{-2x^2 + } 5x - 1 \end{array}$$

$$\frac{x-1}{x-1}$$

$$\frac{0-0}{(x-1)(x^2-2x+1)} = 0$$

$$(x-1)(x-1)^2 = 0$$

$$(x-1)^3 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = x_3 = 1$$

المؤثر التفاضلي العكسي:

$$\frac{1}{D} x = \frac{x^2}{2}$$

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = F(x)$$

$$\Phi(D)y = F(x)$$

$$y_p = \frac{1}{\Phi(D)} F(x)$$

المعادلة هي  $F(x)$  من الشكل:

$$\frac{1}{\Phi(D)} e^{mx} = \frac{1}{\Phi(m)} e^{mx} ; \Phi(m) \neq 0$$

$$\Phi(m) = 0$$

$$\frac{1}{\Phi(D)} e^{mx} = \frac{1}{\Phi'(m)} x e^{mx} ; \Phi(m) = 0$$

$$\Phi(D) \frac{1}{\Phi(m)}$$

مثال: أوجد الحل الخاص للمؤثر التفاضلي العكسي:

$$y'' + 2y' + y = e^x$$

$$[D^2 + 2D + 1]y = e^x$$

نؤثر على طرفي المعادلة بالمؤثر التفاضلي العكسي

$$y_p = \frac{1}{D^2 + 2D + 1} e^x = \frac{1}{4} e^x$$



$$y'' - 2y' + y = e^x \quad \text{مثال 2: أوجد الحل الخاص:}$$

$$y_p = \frac{1}{D^2 - 2D + 1} e^x$$

$$\phi(1) = 0 \quad \text{ملامح أولي}$$

$$\phi(0) = 0^2 - 2 \cdot 0 + 1$$

$$\phi'(0) = 2 \cdot 0 - 2$$

$$\phi''(0) = 2 - 2 = 0$$

$$\phi'''(0) = 2 \neq 0$$

$\star$

$$(2) \quad \frac{1}{D-m} \cos ax = \frac{1}{m^2 + a^2} [a \sin ax - m \cos ax]$$

$$\frac{1}{D-3} \cos 2x = \frac{1}{4+9} [2 \sin 2x - 3 \cos 2x] \quad \text{نلاحظ}$$

$$\frac{1}{D+2} \sin 3x = \frac{1}{4+9} [-3 \cos 3x + 2 \sin 3x]$$

$$(3) \quad \frac{1}{D-m} \frac{\text{ch } ax}{\text{sh } ax} = \frac{1}{a^2 - m^2} \left[ a \frac{\text{sh } ax}{\text{ch } ax} - m \frac{\text{ch } ax}{\text{sh } ax} \right]$$

$$(4) \quad \frac{1}{\phi(D^2)} \sin mx \cos = \frac{1}{\phi(-m^2)} \sin mx \cos ; \phi(-m^2) \neq 0$$

11

11

$$\frac{1}{D^3 + D^2 + D + 5} \sin x$$

$$\text{Ans: } D^2 = -1$$

$$= \frac{1}{-D - 1 + D + 5} \sin x = \frac{1}{4} \sin x$$

$$\frac{1}{D^2 + D + 5} \cos x = \frac{1}{-1 + D + 5} \cos x$$

$$= \frac{1}{D + 4} \cos x = \frac{1}{16 + 1} [\sin x + 4 \cos x]$$

$$\frac{1}{\phi(D^2) \text{ ch}} \text{ sh mx} = \frac{1}{\phi(m)} \frac{\text{sh mx}}{\text{ch}} \quad \phi(m) \neq 0$$

$$e^{ian} = \cos ax + i \sin ax$$

$$\text{ans: } a \text{ in } e^{ian} = e^{\cos x + i \sin x}$$

$$\text{Im } e^{ian} = \sin ax \quad \text{Re } e^{ian} = \cos ax$$

$$\text{Re } e^{ian} = \cos ax$$

$$\frac{1}{\phi(D^2) \sin x} = \text{Re} \left[ \frac{1}{e^{ian}} \right] \quad \phi(m) \neq 0$$

Alamal



مثال ١ :  $\cos ax$   $\Phi(-m^2) = 0$

$D^2 + a^2$   $\frac{1}{D^2 + a^2} e^{iax}$

$= \text{Re} \frac{1}{D^2 + a^2} e^{iax}$   $\Phi(D) = D^2 + a^2$

$= \text{Re} \frac{1}{D^2 + a^2} e^{iax}$   $\Phi'(D) = 2D$

$= \frac{1}{2a} \text{Re} \frac{1}{D} e^{iax}$   $\Phi''(D) = 2 \neq 0$

$= \frac{1}{2a} \text{Re} [-i \cos ax + i \sin ax] D^{-1} e^{iax}$   $\frac{1}{2a} \sin ax$

$= \frac{1}{2a} \text{Re} [-i \cos ax + i \sin ax]$   $= \frac{1}{2a} \cos ax$

$= \left( \frac{1}{2a} \sin ax \right)$

أوجد الحل الخاص ومنه المؤثر التفاضلي للـ  $\sin ax$

$y'' + y^{(3)} + y'' + y' = \sin ax$

$[D^4 + D^3 + D^2 + D] y = \sin ax$

$y_p = \frac{1}{D^4 + D^3 + D^2 + D} \sin ax$   $\Phi(-m) = 0$

$y_p = \text{Im} \frac{1}{D^4 + D^3 + D^2 + D} e^{iax}$

$y_p = \frac{1}{D^4 + D^3 + D^2 + D} e^{iax}$   $\Phi(D) = D^4 + D^3 + D^2 + D$

$y_p = \frac{1}{D^4 + D^3 + D^2 + D} e^{iax}$   $\Phi'(D) = 4D^3 + 3D^2 + 2D + 1$

$y_p = \frac{1}{D^4 + D^3 + D^2 + D} e^{iax}$   $\Phi''(D) = 12D^2 + 6D + 2 \neq 0$

$y_p = \frac{1}{D^4 + D^3 + D^2 + D} e^{iax}$   $\Phi'''(D) = 24D + 6 \neq 0$

$y_p = \frac{1}{D^4 + D^3 + D^2 + D} e^{iax}$   $\Phi^{(4)}(D) = 24 \neq 0$

$y_p = \frac{1}{D^4 + D^3 + D^2 + D} e^{iax}$   $\Phi^{(5)}(D) = 0$

$y_p = \frac{1}{D^4 + D^3 + D^2 + D} e^{iax}$   $\Phi^{(6)}(D) = 0$

$y_p = \frac{1}{D^4 + D^3 + D^2 + D} e^{iax}$   $\Phi^{(7)}(D) = 0$

$y_p = \frac{1}{D^4 + D^3 + D^2 + D} e^{iax}$   $\Phi^{(8)}(D) = 0$

Alamal

$$y_p = \frac{-\alpha}{2} \operatorname{Im} \frac{1-i}{2} [\cos \alpha + i \sin \alpha]$$

$$y_p = \frac{-\alpha}{4} \operatorname{Im} [\cos \alpha + i \sin \alpha - i \cos \alpha + \sin \alpha]$$

$$y_p = \frac{-\alpha}{4} [\sin \alpha - \cos \alpha]$$

$$\frac{1}{D^2 - \alpha^2} \sin \alpha x \quad \phi(\omega^2) = 0$$

$$\frac{1}{D^2 - \alpha^2} \left[ \frac{e^{\alpha x} - e^{-\alpha x}}{2} \right] = \frac{1}{2} \frac{1}{D^2 - \alpha^2} e^{\alpha x} - \frac{1}{2} \frac{1}{D^2 - \alpha^2} e^{-\alpha x}$$

$$y_p = \frac{1}{2} \frac{\alpha}{2\alpha} e^{\alpha x} - \frac{1}{2} \frac{\alpha}{2\alpha} e^{-\alpha x} \quad \phi(D) = D^2 - \alpha^2$$

$$y_p = \frac{\alpha}{2\alpha} \left[ \frac{e^{\alpha x} - e^{-\alpha x}}{2} \right] \quad \phi'(D) = 2D$$

$$y_p = \frac{\alpha}{2\alpha} \frac{\sin \alpha x}{\alpha} \quad \phi'(D) = 2\alpha$$

$$\frac{1}{\phi(D)} e^{\alpha x} \cdot v(x) = e^{\alpha x} \frac{1}{\phi(D+m)} v(x) \quad \text{Exple}$$

$$\frac{1}{\phi(D)} \alpha \cdot v(x) = \left[ \alpha \frac{1}{\phi(D)} v(x) - \frac{1}{\phi(D)} \phi'(D) v(x) \right] \quad \text{Exple}$$



$$\frac{1}{D^2+2} e^x \sin x$$

قاعدة الزمرة

$$= e^x \frac{1}{(D+1)^2+2} \sin x$$

$$= e^x \frac{1}{D^2+2D+3} \sin x = e^x \frac{1}{-1+2D+3} \sin x$$

$$= e^x \frac{1}{2D+2} \sin x = \frac{e^x}{2} \frac{1}{D+1} \sin x$$

$$= \frac{e^x}{2} \left[ \frac{1}{1+1} (-\cos x + \sin x) \right] \quad \phi(1)=0$$

$$= \frac{e^x}{4} [-\cos x + \sin x]$$

★

قاعدة

$$\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+\dots$$

$$\frac{1}{1-D} = 1+D+D^2+\dots$$

$$\frac{1}{1+D} = 1-D+D^2-D^3+\dots$$

$$\frac{1}{1-(D^2+D+1)}$$

$$1^4 + 6 \cdot 1^3 + 12 \cdot 1^2$$

$$(D^2 + 1)^2 x^2$$

$$1^4 + 6 \cdot 1^3 + 12 \cdot 1^2$$

$$\frac{1}{D-D} x^2 = [1 + D + D^2 + \dots + D^n] x^2$$

$$\frac{1}{1-D} x^2 = [1 + D + D^2 + D^3] x^2$$

$$= x^2 + 2x + 2 + 0$$

$$\frac{1}{D^2 + 3D + 5} x^2 = \frac{1}{5} \frac{1}{1 + \frac{1}{5}(D^2 + 3D)} x^2$$

$$= \frac{1}{5} \left[ 1 - \frac{1}{5}(D^2 + 3D) + \frac{1}{25}(D^2 + 3D)^2 \right] x^2$$

$$= \frac{1}{5} \left[ x^2 - \frac{1}{2} [2 + 6x] + \frac{1}{25} [18] \right]$$

$$\frac{1}{D^2 + 1} x \sin x : \text{homework}$$

$$\frac{1}{D^2 - 1} x e^x$$

$$= e^x \cdot \frac{1}{(D+1)^2 - 1} x$$

$$= e^x \cdot \frac{1}{D^2 + 2D} x = e^x \cdot \frac{1}{D+2} \frac{x}{2}$$

$$= e^x \cdot \frac{1}{D+2} \frac{x}{2} = \frac{e^x}{2} \frac{1}{D+2} x^2$$

$$= \frac{e^x}{4} \frac{1}{1 + \frac{D}{2}} x^2 = \frac{e^x}{4} \left[ 1 - \frac{D}{2} + \frac{D^2}{4} \right] x^2$$

$$= \frac{e^x}{4} \left[ x^2 - x + \frac{1}{2} \right]$$



$$\frac{1}{D^2-1} x e^x = \left[ x \frac{1}{D^2-1} e^x - \frac{1}{D^2-1} 2D \frac{1}{D^2-1} e^x \right] \quad \frac{1}{2}$$

$$= \left[ x \frac{x}{2} e^x - \frac{1}{D^2-1} 2D \frac{x}{2} e^x \right]$$

$$= \left[ \frac{x^2}{2} e^x - \frac{1}{D^2-1} [e^x + x e^x] \right]$$

$$= \frac{x^2}{2} e^x - \frac{1}{D^2-1} e^x - \frac{1}{D^2-1} x e^x$$

$$\frac{1}{2} 2 \frac{1}{D^2-1} x e^x = \frac{x^2}{2} e^x - \frac{x}{2} e^x$$

$$\frac{1}{D^2-1} x e^x = \frac{x^2}{4} e^x - \frac{x}{4} e^x$$

الحل العام للمعادلة التفاضلية ذات أبعاد ثابتة

$$\phi(D) y = 0$$

نكتب المعادلة المميزة

$$\phi(m) = 0$$

وهي معادلة جبرية نكتب فيها المعادلة المميزة إذا كانت الحالة الأولى

$$m_1 + m_2 + \dots + m_n$$

$$y_h = A_1 e^{m_1 x} + A_2 e^{m_2 x}$$

الحل العام للمعادلة التفاضلية

مثال

$$y'' - 5y' + 6y = 0$$

أوجد الحل العام للمعادلة

المعادلة ذات أبعاد ثابتة نكتب المعادلة المميزة

$$m^2 - 5m + 6 = 0 \Rightarrow (m-2)(m-3) = 0$$

$$m_1 = 3 \quad \Leftarrow m-3=0$$

$$m_2 = 2 \quad \Leftarrow m-2=0$$

الحل العام للمعادلة

$$y = y_h = A_1 e^{m_1 x} + A_2 e^{m_2 x} = A_1 e^{3x} + A_2 e^{2x}$$

الحالة الثانية: إذا كانت الجذور حقيقية ومختلفة  $m_1 \neq m_2$ :

$$m_1 = m_2 = \dots = m_n = M$$

الحل العام للمعادلة يكون بالشكل:  $y_h = e^{Mx} [a_0 + a_1 x + \dots + a_{n-1} x^{n-1}]$    
 مثال: أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$y'' + 2y' + y = 0$$

الحل: الحالة الخاصة:

$$m^2 + 2m + 1 = 0$$

$$(m+1)^2 = 0 \Rightarrow m_1 = m_2 = -1$$

$$y_h = e^{-x} [a_0 + a_1 x]$$

مثال: أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$$

$$m^3 - 3m^2 + 3m - 1 = 0$$

$$(m-1)^3 = 0 \Rightarrow m_1 = m_2 = m_3 = 1$$

$$= 1 + 0i$$

$$y_h = e^x [a_0 + a_1 x + a_2 x^2]$$

$$y_h = e^x [a_0 + a_1 x + a_2 x^2]$$

$$y_h = e^x [a_0 + a_1 x + a_2 x^2] \cos x$$

$$y_h = e^x [a_0 + a_1 x + a_2 x^2] \sin x$$



الحالة الثالثة: إذا كان الجذر  $m$  عقدي  
 $m_1 = \alpha + i\beta$   
 $m_2 = \alpha - i\beta$  للمعادلة

$$y_h = e^{\alpha x} [A_1 \cos \beta x + A_2 \sin \beta x]$$

تربيع:

$$m^2 + m + 1 = 0$$

$$\Delta = 1 - 4 = -3 \Rightarrow \Delta = 3i^2 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = i\sqrt{3}$$

$$m_1 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$m_2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$y_h = e^{\frac{-1}{2}x} [A_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + A_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x]$$

الحالة الرابعة:

إذا كان الجذر العقدي  $m$  صفر

$$m_1 = m_2 = \dots = m_n = \alpha + i\beta$$

$$\bar{m}_1 = \bar{m}_2 = \dots = \bar{m}_n = \alpha - i\beta$$

$$y_h = e^{\alpha x} [a_0 + a_1 x^{n-1}] \cos \beta x + e^{\alpha x} [b_0 + b_1 x^{n-1}] \sin \beta x$$

أضرب في المعادلة

$$y^{(4)} + 2y'' + y = 0$$

نكتب المعادلة المميزية

$$m^4 + 2m^2 + 1 = 0$$

$$(m^2 + 1)^2 = 0 \Rightarrow m^2 + 1 = 0 \Rightarrow m^2 = -1 = i^2$$

$$m = \pm i$$

$$m_3 = m_1 = i = 0 + i$$

$$m_4 = m_2 = -i = 0 - i$$

$$y_h = e^{ax} [a_0 + a_1 x] \cos x + e^{ax} [b_0 + b_1 x] \sin x$$

$$y_h = [a_0 + a_1 x] \cos x + [b_0 + b_1 x] \sin x$$

أوجد الجواب العام

$$(m-1)^2 (m^2+2)(m+2) = 0$$

$$m_1 = -2 \quad \Leftrightarrow \quad m+2=0$$

$$m = \pm i\sqrt{2} \quad \Leftrightarrow \quad m^2 = -2 \quad \Leftrightarrow \quad m^2+2=0$$

$$m_2 = i\sqrt{2}, \quad m_3 = -i\sqrt{2}$$

$$m = 1 \quad \Leftrightarrow \quad m-1=0 \quad \Leftrightarrow \quad (m-1)^2=0$$

$$m_4 = m_5 = 1$$

$$y_h = A_1 e^{-2x} + A_2 \cos \sqrt{2}x + A_3 \sin \sqrt{2}x + e^x [a_0 + a_1 x]$$

$$m^5 + m^4 + m^3 + m^2 + m + 1 = 0$$

إذا كان  $\omega$

$$y = e^{\omega x} \cos 2x \quad \text{إذا كان } \omega \text{ جذراً لـ } m^2 + 2 = 0$$

نضع في المعادلة

$$m_1 = 1 + 2i$$

$$m_2 = 1 - 2i$$

$$(m-m_1)(m-m_2)(m-m_3)(m-m_4)(m-m_5) = 0$$

$$(m-1-2i)(m-1+2i)[m^2+2](m-1)^2 = 0$$

$$m-1-2i$$

$$m-1+2i$$

$$m^2 - m - 2mi$$

$$0 - m + 1 + 2i$$

$$0 - 0 + 2mi - 2i + 4$$

$$m^5 - 2m + 5 \quad m^5 + m^4 + m^3 + m^2 + m + 1$$

$$m^2 - 2m + 5$$





$$\frac{1}{D^2+1} x \sin x$$

$$= \left[ x \frac{1}{D^2+1} \sin x - \frac{1}{D^2+1} 2D \frac{1}{D^2+1} \sin x \right]$$

$$= x \frac{-x}{2} \cos x - \frac{1}{D^2+1} 2D \frac{-x}{2} \cos x$$

$$= -\frac{x^2}{2} \cos x - \frac{1}{D^2+1} [-\cos x + x \sin x]$$

$$= -\frac{x^2}{2} \cos x + \frac{x}{2} \sin x - \frac{1}{D^2+1} x \sin x$$

$$2 \frac{1}{D^2+1} x \sin x = -\frac{x^2}{2} \cos x + \frac{x}{2} \sin x$$

$$\frac{1}{D^2+1} x \sin x = -\frac{x^2}{4} \cos x + \frac{x}{4} \sin x$$



$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$\cosh^2 x - 1 = \sinh^2 x$$

$$\frac{1}{D^2-1} x e^x = e^x \cdot \frac{1}{(D+1)^2-1} x = e^x \cdot \frac{1}{D^2+2D} x$$

$$= e^x \cdot \frac{1}{2D} \cdot \frac{1}{D+1} x = \frac{e^x}{2} \cdot \frac{1}{D} \left[ 1 - \frac{D}{2} + \right] x$$

$$= \frac{e^x}{2} \cdot \frac{1}{D} \left[ x - \frac{1}{2} \right]$$

$$= \frac{e^x}{2} \cdot \left[ \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} x \right]$$

$$= \frac{e^x x^2}{4} - \frac{e^x x}{4}$$

$$I = \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 - a^2}}$$

$$\sqrt{x^2 - a^2} \quad ; \quad x = a \cosh t$$

$$x^2 = a^2 \cosh^2 t$$

$$\frac{x}{a} = \cosh t$$

$$x = a \cosh t \Rightarrow dx = a \sinh t \, dt$$

$$I = \int \frac{a \sinh t \, dt}{a^2 \cosh^2 t \sqrt{a^2 \cosh^2 t - a^2}} = \frac{1}{a^2} \int \frac{\sinh t}{\cosh^2 t \sinh t} dt$$

$$= \frac{1}{a^2} \int \frac{dt}{\cosh^2 t} = \frac{1}{a^2} \tanh t = \frac{\sinh t}{a^2 \cosh t} = \frac{\sqrt{\cosh^2 t - 1}}{a^2 \frac{x}{a}}$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}}{a x} = \frac{\sqrt{\frac{x^2 - a^2}{a^2}}}{a x} = \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a^2 x}$$



تمرين

المطلوب هو ايجاد التفاضلية :  $y'' + y = 2 \sin x \sin 2x$   
 الجواب : نأخذ ايجاد التفاضلية

$$y'' + y = 0$$

$$m^2 + 1 = 0 \Rightarrow m^2 = -1 \Rightarrow m^2 = i^2$$

$$m = \pm i$$

$$m_1 = i$$

$$m_2 = -i$$

$$y_h = A_1 \cos x + A_2 \sin x$$

لنبحث الدالة الخاصة  $y_p$  حسب ((المؤثر التفاضلي الكلي))  
 ((المؤثر التفاضلي الكلي)) لنبحث الدالة الخاصة  $y_p$  بالكتابة

$$(D^2 + 1)y = 2 \sin x \sin 2x$$

دفع  $y_p$  على العلاقة بالمؤثر التفاضلي الكلي  $\frac{1}{D^2 + 1}$   

$$y_p = \frac{1}{D^2 + 1} 2 \sin x \sin 2x$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \quad (1)$$

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y \quad (2)$$

نفسب (1) و (2) ونجمع

$$\cos(x-y) - \cos(x+y) = 2 \sin x \sin y$$

$x = x \quad y = 2x$

$$\cos(x) - \cos(3x) = 2 \sin x \sin 2x$$



$$y_p = \frac{1}{D^2+1} (\cos x - \cos 3x)$$

$$Z_1 = \frac{1}{D^2+1} \cos x$$

$$\phi(-m^2) = 0$$

$$Z_1 = \operatorname{Re} \frac{1}{D^2+1} e^{ix}$$

$$\phi'(0) = 2D$$

$$\phi'(i) = 2i \neq 0$$

$$Z_1 = \operatorname{Re} \frac{x}{2i} e^{ix}$$

$$Z_1 = \frac{x}{2} \operatorname{Re} -i(\cos x + i \sin x)$$

$$Z_1 = \frac{x}{2} \sin x$$

$$y_p = \frac{x}{2} \sin x - \frac{1}{-8} \cos 3x$$

$$y = y_h + y_p$$

الحل الثاني المقترح  $y_p$

(1) إذا كانت  $F(x)$  من الشكل  $F(x) = A e^{bx}$   
 $y_p = B e^{bx}$  مثال:

$F = 3e^{2x}$   
الحل  $y_p = A e^{2x}$

(2) إذا كانت  $F(x)$  من الشكل  $F(x) = A \cos bx + B \sin bx$

$y_p = A_1 \cos bx + B A_2 \sin bx$

الحل  
 $F(x) = 3 \sin 2x$

$y_p = A \sin 2x + B \cos 2x$

(3) إذا كانت  $F(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$

$y_p = b_n x^n + \dots + b_1 x + b_0$

الحل  
 $F(x) = x^3$

$y_p = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$



(4) إذا كانت

$$F(x) = A \sinh \beta x + B \cosh \beta x$$

$$y_p = A_1 \sinh \beta x + A_2 \cosh \beta x$$

(5) إذا كانت

$$F(x) = e^{\alpha x} [A \cos \beta x + B \sin \beta x]$$

$$y_p = e^{\alpha x} [A_1 \cos \beta x + A_2 \sin \beta x]$$

مثال ١

$$F(x) = e^{2x} \cdot \sin x$$

$$y_p = e^{2x} [A \sin x + B \cos x]$$

(6) إذا كانت

$$F(x) = e^{\alpha x} [a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0]$$

$$y_p = e^{\alpha x} [b_n x^n + \dots + b_1 x + b_0]$$

مثال ٢

$$F(x) = x^2 e^x$$

$$y_p = e^x [a_2 x^2 + a_1 x + a_0]$$

$$F(x) = e^{\alpha x} [a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0] \sin \beta x + e^{\alpha x} [b_n x^n + \dots + b_0] \cos \beta x$$

(7) إذا كانت

$$y_p = e^{\alpha x} [C_n x^n + \dots + C_0] \sin \beta x$$

$$+ e^{\alpha x} [D_n x^n + \dots + D_0] \cos \beta x$$

مثال ٣

$$F(x) = x^2 \cdot e^x \cdot \sin x$$

$$y_p = e^x [a_2 x^2 + a_1 x + a_0] \sin x + e^x [b_2 x^2 + b_1 x + b_0] \cos x$$

نزل الأشراف رحمتهم على كل مؤمن و مؤمنة و نزل هذا الأشراف  
معهم عراة الأشراف بينهم و إلى الأبد  
Alamal



1. خزنين دونه: لكن المعاداة التفاضلية

$$y^{(5)} - 2y^{(4)} + 2y''' - 4y'' - y' - 2y = e^{2x} + \sin x$$

(1) أوجد المعاداة المتجانسة ((محلولة))

$$y_h = A_1 e^{2x} + [A_2 + A_3 x] \cos x + [A_4 + A_5 x] \sin x$$

(2) افترض شكلًا عامًا:

$$y_p = F(x) = e^{2x} + \sin x$$

$$y_p = A e^{2x} + B \sin x + D \cos x$$

نلاحظ وقوع التداخل بين  $y_p$  و  $y_h$ ، لذلك نضرب  $y_p$  بـ  $x$  فنحصل على:

$$y_p = A x e^{2x} + B x \sin x + D x \cos x$$

نضرب القسم المتكرر بين  $y_p$  و  $y_h$

$$y_p = A x e^{2x} + B x^2 \sin x + D x^2 \cos x$$

(3) أوجد الحل الكلي من المعاداة التفاضلية الأصلية

$$y_p = \frac{1}{D^5 - 2D^4 + 2D^3 - 4D^2 + D - 2} [e^{2x} + \sin x]$$

$$y_p = I_1 + I_2$$

$$I_1 = \frac{1}{D^5 - 2D^4 + 2D^3 - 4D^2 + D - 2} e^{2x} = \frac{x}{25} e^{2x}$$

$$I_2 = \frac{1}{D^5 - 2D^4 + 2D^3 - 4D^2 + D - 2} \sin x = \frac{x^2}{40} [2 \sin x + 5 \cos x]$$

$$y_p = \frac{x}{25} e^{2x} + \frac{x^2}{20} \sin x + \frac{x^2}{40} \cos x$$

الاجابة

$$A = \frac{1}{25}, B = \frac{1}{20}, D = \frac{1}{40}$$

$$y = y_h + y_p$$



إذا كانت المعادلة

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = F(x)$$

أشرف أب دقة في المربعة (n-1)

$$y = e^{-\frac{1}{n} \int a_{n-1}(x) dx}$$

z

فأشرف ونعول في المعادلة

(تحويل المعادلة من افعال متغيرة الى معادلة ذات افعال ثابتة) فربينة خيرة

$$x^2 y'' - 4x y' + (6 - x^2) y = x^4 \sin x$$

(1) أشرف أب دقة - الأول

(2) أشرف أب دقة المعادلة الناتجة، الكل العالم

أفعال في المربعة

$$y'' - \frac{4}{x} y' + \left(\frac{6}{x^2} - 1\right) y = x^2 \sin x$$

$$y = e^{-\frac{1}{2} \int \frac{4}{x} dx} \cdot z = e^{-2 \ln x} \cdot z = e^{+2 \ln x} \cdot z$$

$$y = x^2 \cdot z \Rightarrow y' = 2x \cdot z + x^2 z'$$

$$y'' = 2z + 2xz' + 2xz' + x^2 z'' = 2z + 4xz' + x^2 z''$$

نعول في y, y', y'' في المعادلة

$$\Rightarrow 2z + 4xz' + x^2 z'' - 8z - 4xz' + 6z - x^2 z = x^2 \sin x$$

$$x^2 z'' - x^2 z = x^2 \sin x \Rightarrow$$

$$z'' - z = \sin x$$

معادلة ذات افعال ثابتة

$$m^2 - 1 = 0 \Rightarrow m^2 = 1 \Rightarrow m = \pm 1$$

$$m_1 = 1, m_2 = -1 \Rightarrow \frac{1}{2} y = A_1 e^m + A_2 e^{-m}$$

$$z_p = \frac{1}{D^2 - 1} \sin x = -\frac{1}{2} \sin x$$

1 1

$$z = z_h + z_p = A_1 e^x + A_2 e^{-x} - \frac{1}{2} \sin x \rightarrow$$

1 1 1 1 1 1

$$y = x^2 z = x^2 (A_1 e^x + A_2 e^{-x} - \frac{1}{2} \sin x)$$

$$z = (a)^{\frac{1}{n}}$$

$$z^4 - 5 = 0$$

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$$

$$z^4 = 5$$

$$z = (5)^{\frac{1}{4}}$$



$$32 - 32 \times 16 = 16 \times 2 \times 16 \times 7$$

$$= 0$$

$$1 \quad 1$$

أوجد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية حسب المؤثر التالي:

$$y^{(5)} - 2y^{(4)} + 2y''' - 4y'' + y' - 2y = e^{2x} + \sin x$$

الحل: المعادلة التفاضلية تكتب بالرمز التالي:

$$[D^5 - 2D^4 + 2D^3 - 4D^2 + D - 2]y = e^{2x} + \sin x$$

نؤثر على طرفي المعادلة بالمؤثر العكس القاطع التالي:

$$y_p = \frac{1}{D^5 - 2D^4 + 2D^3 - 4D^2 + D - 2} [e^{2x} + \sin x]$$

$$I_1 = \frac{1}{D^5 - 2D^4 + 2D^3 - 4D^2 + D - 2} e^{2x}$$

$$\phi(2) = 0$$

$$\phi'(0) = 5D^4 - 8D^3 + 6D^2 - 3D + 1$$

$$\phi'(2) = 30 - 64 + 24 - 16 + 1$$

$$\phi'(2) = 25 \neq 0$$

$$I_1 = \frac{x}{25} e^{2x}$$

$$I_2 = \frac{1}{D^5 - 2D^4 + 2D^3 - 4D^2 + D - 2} \sin x$$

$$1^2 = -1$$

$$+D - 2 - 2D + 4 + D - 2 = 0$$

$$\phi(-m^2) = 0$$

$$\phi'(i) = 5 + 8i - 6 - 3i + 1$$

$$= 0$$

$$I_2 = I_m \frac{1}{\theta''} e^{i\omega t}$$

$$\theta''(0) = 240^2 - 240^2 \times 100 = 0$$

$$\theta'(0) = -20i + 24 + 10i = -6$$

$$16 - 2i \neq 0$$

$$I_2 = I_m \frac{\kappa^2}{16 - 2i} e^{i\omega t}$$

$$I_2 = \frac{\kappa^2}{2} I_m \frac{2 + i}{4 + 1} [\cos \omega t + i \sin \omega t]$$

$$I_2 = \frac{\kappa^2}{40} I_m [2 \cos \omega t + i \cos \omega t - \sin \omega t]$$

$$I_2 = \frac{\kappa^2}{40} [2 \sin \omega t + \cos \omega t]$$

$$I_2 = I_1 + I_2 = \frac{\kappa^2}{2} e^{i\omega t} + \frac{\kappa^2}{20} \sin \omega t + \frac{\kappa^2}{40} \cos \omega t$$



# الحلقة الثانية

$$(1+x^2)y'' + xy' - y = 1$$

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

إذا كانت  $y_1 = -1$  ,  $y_2 = x-1$  حلان خاصان للمعادلة

$$y = y_1 + (y_2 - y_1)z = -1 + (x)z$$

$$y = -1 + xz$$

بنتق من الراح ياوي بوجه المعادلة

$$y' = z + xz'$$

$$y'' = z' + z' + xz'' = 2z' + xz''$$

نعوض  $y, y', y''$  في المعادلة التفاضلية

$$2x^2z' + x^3z'' + 2z' + xz'' + xz + x^2z' + 1 - xz = 1$$

$$(x^3+x)z'' + (3x^2+2)z' = 0$$

$$z' = u \Rightarrow z'' = u'$$

$$(x^3+x)u' + (3x^2+2)u = 0$$

$$\frac{u'}{u} = -\frac{(3x^2+2)}{(x^3+x)} \Rightarrow \int \frac{u'}{u} = -\int \frac{(3x^2+2)}{(x^3+x)}$$

$$\frac{3x^2+2}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

نقسم المقامات ونفصلها فنأخذ

$$3x^2+2 = A(x^2+1) + Bx+C = (A+B)x^2 + Cx + A$$

$$A+B=3 \Rightarrow B=3-A$$

$$C=0, A=2$$

$$\Rightarrow -\left[2 \int \frac{1}{x} dx + \int \frac{x}{x^2+1} dx\right] = -2 \ln x - \frac{1}{2} \ln(x^2+1)$$

$$= \ln \frac{1}{x^2} + \ln \frac{1}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}} = \ln \frac{1}{x^2 \sqrt{x^2+1}}$$



$$\ln \frac{u}{c} = \ln \frac{1}{x^2 \sqrt{x^2+1}}$$

$$u = c \cdot \frac{1}{x^2 \sqrt{x^2+1}}$$

$$z' = c \cdot \frac{1}{x^2 \sqrt{x^2+1}} \Rightarrow z = c \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2+1}} + C_1$$

$$z = -c \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} + C_1$$

$$y = -1 + xz = -1 - c \sqrt{x^2+1} + C_1 x$$

إيجاد جذور معادلة من الدرجة الرابعة:

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

$$x = \lambda - \frac{a}{4}, \quad x^2 = \left( \lambda - \frac{a}{4} \right)^2$$

$$x^3 = \left( \lambda - \frac{a}{4} \right)^3, \quad x^4 = \left( \lambda - \frac{a}{4} \right)^4$$

بموضوعة  $x^4, x^3, x^2, x$  في المعادلة الناقصة:

$$\lambda^4 + p\lambda^2 + q\lambda + r = 0$$

نكتب المعادلة كالتالي:

$$z^3 + 2pz^2 + (p^2 - 4r)z - q^2 = 0$$

نقوم بحل المعادلة كالتالي  $z_1, z_2, z_3$

$$2\lambda_1 = \sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3}$$

$$2\lambda_2 = -\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3}$$

$$2\lambda_3 = +\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2} - \sqrt{z_3}$$

$$2\lambda_4 = -\sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} - \sqrt{z_3}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = [ \quad ]$$

مع المعادلة  $x = \lambda - \frac{a}{4}$

$$\lambda_1 = \lambda_1 - \frac{a}{4}$$



1 / 1

أوجد حل المعادلة التفاضلية،  
 $y^{(4)} - 2y''' + 2y'' - 2y' + y = 0$   
 نكتب المعادلة المميزة

$$m^4 - 2m^3 + 2m^2 - 2m + 1 = 0$$

$$m^4 + 2m^2 + 1 - 2m(m^2 + 1) = 0$$

$$(m^2 + 1)^2 - 2m(m^2 + 1) = 0$$

$$(m^2 + 1) [m^2 + 1 - 2m] = 0$$

$$1) \quad (m^2 + 1)^2 = 0 \Rightarrow m^2 = -1 \Rightarrow m = \pm i$$

$$m_1 = i, \quad m_2 = -i$$

$$2) \quad (m^2 - 1)^2 = 0 \Rightarrow m_3 = m_4 = 1$$

$$y_h = A_1 \cos x + A_2 \sin x + e^x [a_0 + a_1 x]$$

$z = a \rightarrow$  معادلة كيرك

$$z^n + a = 0 \Rightarrow z^n = -a \Rightarrow z = (-a)^{\frac{1}{n}}$$

$$(-a)^{\frac{1}{n}} = (|a|)^{\frac{1}{n}} \left[ \cos \left( \frac{2\pi k + \theta}{n} \right) + i \sin \left( \frac{\theta + 2\pi k}{n} \right) \right]$$

$$k = 0, 1, \dots, n-1$$

حيث  $\theta$

$$-a = |a| [\cos \theta + i \sin \theta]$$

$$m^4 - 1 = 0$$

أربع جذور الكاددة:

$$(m^2 - 1)(m^2 + 1) = 0 \Rightarrow m_1 = 1, m_2 = -1$$

$$m_3 = i, m_4 = -i$$

$$m^4 - 1 = 0 \Rightarrow m^4 = 1 \Rightarrow m = (1)^{\frac{1}{4}}$$

$$(1)^{\frac{1}{4}} = 1 \left[ \cos \frac{2\pi k + \theta}{4} + i \sin \frac{2\pi k + \theta}{4} \right] ; k = 0, 1, 2, 3$$

$$1 = 1 [\cos \theta + i \sin \theta] \Rightarrow \theta = 0$$

$$\theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$$

$$\therefore (1)^{\frac{1}{4}} = \left[ \cos \frac{2\pi k}{4} + i \sin \frac{2\pi k}{4} \right] ; k = 0, 1, 2, 3$$

$$k = 0 \leq k \leq 3$$

$$m_1 = 1$$

$$m_2 = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i$$

$$k = 1$$

$$m_3 = \cos \pi + i \sin \pi = -1$$

$$k = 2$$

$$m_4 = -i$$



$$y^{(4)} + 4y''' + 10y'' + 12y' + 5y = 0$$

16/15/2022

10

$$m^4 + 4m^3 + 10m^2 + 12m + 5 = 0$$

$$m^4 + 10m^2 + 5 + 4m(m^2 + 3) = 0$$

$$12 \times m = \lambda - 1$$

$$10 \times m^2 = \lambda^2 - 2\lambda + 1$$

$$4 \times m^3 = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1$$

$$1 \times m^4 = \lambda^4 - 4\lambda^3 + 6\lambda^2 - 4\lambda + 1$$

Substituting  $m^4, m^3, m^2, m$  in eq

$$\Rightarrow \lambda^4 - 4\lambda^3 + 6\lambda^2 - 4\lambda + 1$$

$$4\lambda^3 - 12\lambda^2 + 12\lambda - 4$$

$$10\lambda^2 - 20\lambda + 10$$

$$12\lambda - 12 + 5 = 0$$

$$\lambda^4 + 4\lambda^2 = 0$$

$$\lambda^2 (\lambda^2 + 4) = 0$$

$$m = \lambda - 1$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0 \Rightarrow m_1 = m_2 = -1$$

$$\lambda^2 + 4 = 0$$

$$\lambda^2 = -4 = 4i^2 \Rightarrow \lambda_3 = 2i$$

$$\lambda_4 = -2i$$

$$m_3 = 2i - 1 = -1 + 2i$$

$$m_4 = -2i - 1 = -1 - 2i$$

$$y_h = e^{-x} [a_0 + a_1 x] + e^{-x} [a_2 \cos 2x + a_3 \sin 2x]$$

$$\frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{9\pi}{4}$$

$$\cos \frac{9\pi}{4} =$$

$\frac{9\pi}{4} - \pi \neq \frac{5\pi}{4}$  (2)  $\frac{9\pi}{4} - 2\pi \Rightarrow \frac{\pi}{4}$  (3)  $\frac{9\pi}{4} - 2\pi \Rightarrow \frac{\pi}{4}$

$$\frac{9\pi}{4} - 2\pi = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{9\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2\pi$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

نزدیک تغییرات

$$\sin \frac{3\pi}{2}$$

$$\frac{3\pi}{2} - \pi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{3\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi \Rightarrow \sin \frac{\pi}{2} + \pi = -1$$

نزدیک تغییرات

$$\int_C \frac{f(z)}{z - z_0} = 2\pi i f(z_0)$$

$$\bar{z} = \bar{z}_0 + i(z - z_0)$$

$$|z| = 1$$

$$\int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0)$$